

## Межвузовская Олимпиада по математике 2014-2015

## I тур (заочный)

1. Исследуйте на экстремум функцию  $y = f(f(x))$ , если  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . (3 балла)

2. Вычислите определитель: 
$$\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$$
 (2 балла)

3. Найдите все значения  $a$ , при которых функция  $y = x^3 - 3(a-5)x^2 + 147x - 13$  не имеет точек экстремума. (3 балла)

4. Решите и исследуйте систему уравнений: 
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + 4y + az = 0. \end{cases}$$
 (3 балла)

5. Найдите  $a^2 + b^2 + c^2$ , если известно, что 
$$\begin{cases} a + b + c = 12, \\ ab + bc + ac = -15. \end{cases}$$
 (3 балла)

6. Найдите значение  $\alpha$ , при котором прямая:  $\frac{x+4}{\alpha} = \frac{y+2}{3}$  параллельна прямой:  $2x - y + 4 = 0$ . (2 балла)

7. Вычислите:  $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx$ . (6 баллов)

8. Найдите предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})(\cos \sqrt{x+1} + \cos \sqrt{x})$$
. (6 баллов)

9. Окружность касается прямых  $x-4=0$  и  $x=10$ . Найдите координаты её центра, если он лежит на прямой  $x+2y+5=0$ . (2 балла)

10. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}$  (6 баллов)

11. Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  одного порядка таковы, что  $AB = A + B$ . Пусть  $E$  – единичная матрица такого же порядка, что и  $A$  и  $B$ . Найдите произведение определителей матриц  $A-E$  и  $B-E$ . (2 балла)

12. Вычислите:  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$  (3 балла)

13. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Весна» по очереди играет с командами «Зима», «Осень» и «Лето». Найдите вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом выиграет команда «Весна». (2 балла)

14. 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на 14,5%, затем Иван переводит в банк  $X$  рублей. Какой должна быть сумма  $X$ , чтобы Иван выплатил долг двумя равными платежами? (4 балла)

15. Числа-палиндромы – это такие натуральные числа, которые читаются слева направо и справа налево одинаково. Подсчитайте количество трёхзначных чисел палиндромов, делящихся на 2. (2 балла)